-30- ENSET 81

126 503

J. 1520

OPTION SC. NAT.

DURÉE : 4 heures

La première partie du problème définit une suite de polynômes orthogonaux. La deuxième partie, utilisant cette suite, est consacrée à quelques propriétés de « convergence » de moments généralisés d'une suite de variables aléatoires discrètes.

PREMIÈRE PARTIE

On considère la suite $(Q_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions de la variable réelle x, définie par :

$$Q_0(x) = 1$$

$$Q_1(x) = x$$

$$Q_n(x) - x\,Q_{n-1}(x) + Q_{n-2}(x) = 0 \qquad \forall\, n \geqslant 2$$

1° Montrer que Q_n est un polynôme de degré effectif n et déterminer son terme de plus haut degré. En déduire que $\{Q_0, Q_1, \ldots, Q_n\}$ forme une base de l'espace vectoriel des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à n;

2° Pour $x \in]-2, +2[$, on pose $\theta = \text{Arc cos } \frac{x}{2}$.

Montrer alors que :

$$Q_n(2\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}.$$

En déduire toutes les racines du polynôme Q_n.

3° Montrer que si n et m sont des entiers naturels distincts, on a :

$$\int_{-2}^{+2} \sqrt{4 - x^2}\; Q_n(x)\, Q_m(x)\, dx = 0.$$

(Propriété d'orthogonalité de la suite Q_n.)

En déduire que, pour tout polynôme Q de degré $p < n$:

$$\int_{-2}^{+2} \sqrt{4 - x^2}\; Q(x)\, Q_n(x)\, dx = 0.$$

Calculer :

$$\int_{-2}^{+2} \sqrt{4 - x^2}\; [Q_n(x)]^2\, dx.$$

Tournez la page S. V. P.

4° n étant un entier positif fixé, on considère l'équation différentielle du second ordre (E_n).

$$(E_n) \qquad (4 - x^2)\, y'' - 3\, x\, y' + n\,(n+2)\, y = 0$$
$$x \in [-2, +2]$$

a. Trouver l'équation différentielle (F_n) transformée de (E_n) sur l'intervalle $]-2, +2[$ par le changement de variable : $\theta = \text{Arc cos } \frac{x}{2}$.

On pourra poser : $Y(\theta) = Y\left(\text{Arc cos } \frac{x}{2}\right) = y(x)$.

b. Déterminer l'équation différentielle (G_n) vérifiée par la fonction Z telle que $Z(\theta) = Y(\theta) \cdot \sin \theta$.

c. Intégrer l'équation (G_n) et déterminer ainsi toutes les solutions de (E_n). Vérifier que, parmi ces solutions, il en existe qui sont des polynômes de degré n. Comparer ces polynômes avec Q_n.

d. Montrer que l'on a $\forall x \in [-2, +2]$:

$$\frac{d}{dx}\left[(4 - x^2)^{3/2}\, Q_n'(x)\right] = -\, n\,(n+2)\,(4 - x^2)^{1/2}\, Q_n(x)$$

et en déduire pour n et m entiers arbitraires

$$n\,(n+2) \int_{-2}^{+2} \sqrt{4 - x^2}\; Q_n(x)\, Q_m(x)\, dx = \int_{-2}^{+2} (4 - x^2)^{3/2}\, Q_n'(x)\, Q_m'(x)\, dx.$$

Retrouver à l'aide de cette formule la propriété d'orthogonalité des polynômes Q_n déjà prouvée dans la question 3°.

DEUXIÈME PARTIE

DÉFINITIONS ET NOTATIONS.

On note Y la variable aléatoire réelle de densité ρ définie par

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} \qquad \text{si } x \in [-2, +2]$$

$$\rho(x) = 0 \qquad \text{si } x \notin [-2, +2]$$

On suppose également donnée une suite $(X^{(n)})_{n \in \mathbf{N}^*}$ de variables discrètes. Chacune de ces variables est définie par sa loi de probabilité, c'est-à-dire par les données suivantes :

$$\text{Im}\,(X^{(n)}) = \left\{ x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)} \right\}$$

$$p_j^{(n)} = \text{Prob}\left(X^{(n)} = x_j^{(n)}\right) \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

avec $\quad -2 \leqslant x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} \leqslant 2.$

A une telle variable discrète $X^{(n)}$, on associe le polynôme :

$$\omega^{(n)}(x) = \left(x - x_1^{(n)}\right)\left(x - x_2^{(n)}\right) \ldots \left(x - x_n^{(n)}\right)$$

ainsi que les polynômes de degrés $n - 1$:

$$l_j^{(n)}(x) = \frac{\omega^{(n)}(x)}{\left(x - x_j^{(n)}\right)\left[\omega^{(n)}\right]'\left(x_j^{(n)}\right)}$$

$\left[\omega^{(n)}\right]'$ désignant une dérivée.

Pour toute fonction f continue sur $[-2, +2]$, on pose :

$$M(f, X^{(n)}) = \sum_{j=1}^{n} f\left(x_j^{(n)}\right) p_j^{(n)}$$

$$M(f, Y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{+2} \sqrt{4 - x^2}\, f(x)\, dx$$

de sorte que si $f(t) = t^k$ on retrouve les moments d'ordre k.

Soit E un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-2, +2]$. On dit que Y et $X^{(n)}$ sont égales dans E (n étant un entier déterminé) si :

$$\forall f \in E \qquad M(f, X^{(n)}) = M(f, Y).$$

On dit que la suite $(X^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers Y dans E si :

$$\forall f \in E \qquad \lim_{n \to \infty} M(f, X^{(n)}) = M(f, Y).$$

1° *a.* Montrer que, pour chacune des variables discrètes $X^{(n)}$, les polynômes $l\left(\begin{smallmatrix}(n)\\ j\end{smallmatrix}\right)$ associés vérifient :

$$l_j^{(n)}\left(x_k^{(n)}\right) = 1 \qquad \text{si } j = k$$

$$= 0 \qquad \text{si } j \neq k.$$

b. Soit f une fonction définie dans $[-2, +2]$. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un polynôme P_{n-1} unique de degré $n - 1$ (dit polynôme interpolatoire de f) tel que :

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\} \qquad P_{n-1}\left(x_j^{(n)}\right) = f\left(x_j^{(n)}\right)$$

(On pourra exprimer ce polynôme à l'aide des $l_j^{(n)}$.)

2° Soit une variable aléatoire discrète $X^{(n)}$ telle que $\omega^{(n)} = Q_n$ polynôme de degré n de la première partie. On pose :

$$a_j^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{+2} l_j^{(n)}(x) \sqrt{4 - x^2}\, dx.$$

Montrer que ces nombres $a_j^{(n)}$ sont strictement positifs (on pourra écrire $\left(l_j^{(n)}\right)^2 = \omega^{(n)} Q + R$ avec Q et R polynômes de degrés inférieurs à n et comparer R à $l_j^{(n)}$).

Que peut-on dire de $\sum_{j=1}^{n} \left(a_j^{(n)}\right)$? En déduire que les couples $\left(x_j^{(n)}, a_j^{(n)}\right)$ constituent une loi de probabilité.

Tournez la page S. V. P.

Dans toute la suite du problème, on dit qu'une variable discrète $X^{(n)}$ est de type interpolatoire si :

$$p_j^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{+2} l_j^{(n)}(x) \sqrt{4 - x^2}\, dx$$

ce qui précède montrant qu'il en existe.

3° On considère $E = \mathfrak{P}_{n-1}$ l'espace vectoriel des polynômes de degrés $< n$. Montrer que $X^{(n)}$ et Y sont égales dans $E = \mathfrak{P}_{n-1}$ si et seulement si $X^{(n)}$ est de type interpolatoire.

4° On considère $E = \mathfrak{P}_{2n-1}$ l'espace vectoriel des polynômes de degrés $< 2n$. Montrer que $X^{(n)}$ et Y sont égales dans $\mathfrak{P}_{2n-1}$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1° $X^{(n)}$ est de type interpolatoire.

2° $\forall p < n \qquad \int_{-2}^{+2} x^p\, \omega^{(n)}(x) \sqrt{4 - x^2}\, dx = 0$.

(Pour la condition suffisante, on pourra écrire, lorsque $P \in \mathfrak{P}_{2n-1}$, $P = \omega^{(n)} Q + R$ avec deg Q et deg $R < n$).

Donner un exemple de variable $X^{(n)}$ possédant ces deux propriétés.

5° Soit une suite (X^n) telle que, $\forall n$, $X^{(n)}$ soit de type interpolatoire, montrer que $X^{(n)}$ converge vers Y dans l'espace vectoriel $\mathfrak{P}$ des polynômes.

6° Dans cette question, on note E l'ensemble des fonctions f définies sur $[-2, +2]$ comme restrictions à cet intervalle des fonctions sommes de séries entières de rayons de convergence $R > 2$

$$f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n \quad \forall x \in [-2, +2].$$

a. Montrer que E est un espace vectoriel de fonctions continues.

b. Montrer que $\forall f \in E$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P \in \mathfrak{P}$ tel que :

$$\text{Sup}\{|f(x) - P(x)|,\ x \in [-2, +2]\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

c. On considère une suite $(X^{(n)})$ de variables aléatoires de type interpolatoire. Montrer que pour $f \in E$ et $\varepsilon > 0$ donnés, il existe $P \in \mathfrak{P}$ et il existe un entier n tels que

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^{+2} f(x) \sqrt{4 - x^2}\, dx - \sum_{j=1}^{j=n} f\left(x_j^{(n)}\right) p_j^{(n)} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_{-2}^{+2} \sqrt{4 - x^2}\, dx + \sum_{j=1}^{j=n} p_j^{(n)} \left| f\left(x_j^{(n)}\right) - P\left(x_j^{(n)}\right) \right|.$$

En conclure que (X^n) converge vers Y dans l'espace E.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail